MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 11
26.06.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. Man betrachte den euklidischen $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$.

   a) Man zeige, daß der Endomorphismus

   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = A \cdot x, \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   eine Geradenspiegelung beschreibt, und bestimme die Spiegelachse.
   Hinweis:
   Zeigen Sie, dass $A^T A = E_2$ gilt. Damit ist gezeigt, dass A orthogonal ist. Die Spiegelachse ist durch den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \lambda = 1)$ bestimmbar.

   b) Man bestimme die Abbildungsmatrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß der Endomorphismus $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = B \cdot x$, die Geradenspiegelung an der Spiegelachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschreibt.
   Hinweis: Diese Aufgabe kann wie Aufgabe 11.11 aus der Vorlesung gelöst werden.

   c) Man zeige, daß die Hintereinanderausführung $g \circ f$ eine Drehung beschreibt, und bestimme den Drehwinkel.
   Bemerkung:
   Überlegen Sie sich auch geometrisch (d.h. durch eine Skizze), dass die Hintereinanderausführung von zwei Geradenspiegelungen eine Drehung ergibt. Im Allgemeinen hilft es bei Drehungen und Spiegelungen immer, sich die Situation auch graphisch zu überlegen.

2. Im euklidischen $(\mathbb{R}^2, \circ)$ seien $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Man bestimme alle orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = w$ und gebe die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f = \ell_A$ an.
   Hinweis:
   Diese Aufgabe kann wie Aufgabe 11.12 aus der Vorlesung gelöst werden.

   b) Welche geometrische Bedeutung besitzen die in a) ermittelten Abbildungen?

3. Im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \circ)$ seien die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme jeweils die Abbildungsmatrix für die Orthogonalspiegelung s_U am Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ für

a) die Gerade $U = \mathbb{R} \cdot u$
Hinweis: Die Abbildung s_U vermöge $s_U(a) = a$ für alle $a \in U$ und $s_U(v) = -v$ für alle $v \in U^\perp$. Finden Sie mit Hilfe der Abbildungsvorschrift die korrespondierende Abbildungsmatrix. Bestimmen Sie zuerst eine Orthonormalbasis von $U^\perp$. Mit Hilfe der Orthonormalbasis des Untervektoraumes $U^\perp$ und einem nomierten Vektor $a \in U$ können Sie die Abbildungsmatrix direkt bestimmen.

b) die Ebene $U = \mathbb{R} \cdot v + \mathbb{R} \cdot w$.
Hinweis: Die Abbildungsmatrix wird wie in Teilaufgabe a) konstruiert. Der einzige Unterschied besteht darin, dass $\dim(U) = 2$ gilt. Konstruieren Sie daher zuerst eine Orthonormalbasis von U und verfahren Sie dann in Analogie zu Teilaufgabe a).

4. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).* Man zeige, daß die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x, \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

im euklidischen $(\mathbb{R}^3, \circ)$ die Spiegelung an einer Ebene ist, und bestimme eine Gleichung für diese Spiegelebene.
Hinweis:
Zeigen Sie zuerst, dass A eine orthogonale Matrix ist und eine Spiegelung beschreibt. Die Ebene U erhalten Sie mit Hilfe des Eigenraumes $\mathrm{Eig}(f, \lambda = 1)$.